



TITLE:

ファイバー不変測度とRuelle不変量について (力学系理論の新しい展開)

AUTHOR(S):

中山, 裕道

CITATION:

中山, 裕道. ファイバー不変測度とRuelle不変量について (力学系理論の新しい展開). 数理解析研究所講究録 2000, 1179: 120-130

ISSUE DATE:

2000-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/64529>

RIGHT:

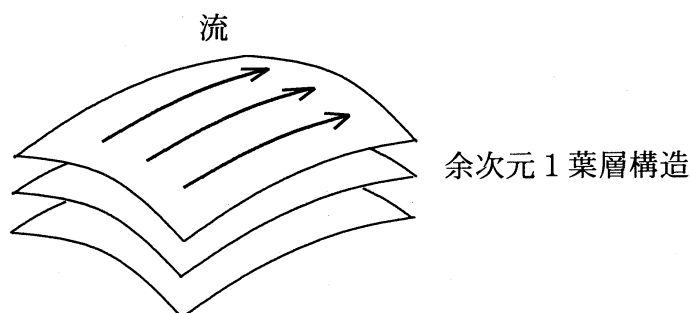
ファイバー不変測度と Ruelle 不変量について

広島大学総合科学部 中山 裕道 (Hiromichi Nakayama)
Faculty of Integrated Arts and Sciences
Hiroshima University

1 背景

いま, 3次元閉多様体 M とその上の流で固定点を持たないもの φ_t を考える. 流は余次元で考えると2になるため, 解析が非常に困難である. そこで, 余次元を分解するため次の問題を考える.

問題. 流 φ_t は, いつ余次元1の葉層構造と接するか?



Anosov 流や horocycle 流といった流を考えると, これらは安定葉層構造を持つため, いつも余次元1葉層構造に接している (但し, 微分可能性は落ちる). また, 3次元トーラスの線形流も余次元1葉層構造に接することが容易に示される.

もし, 流が余次元1葉層構造に接したとすると, これは流に対して非常に強い制限を与える. たとえば, いま多様体 M を3次元球面とすると, Novikov の定理より, この葉層構造は2次元トーラスと同相な葉を持つことが知られており (C^0 葉層構造でもこの定理は成立する), この葉上の軌道はこの葉から外に出られないため, たとえばすべての軌道が稠密になるということは起

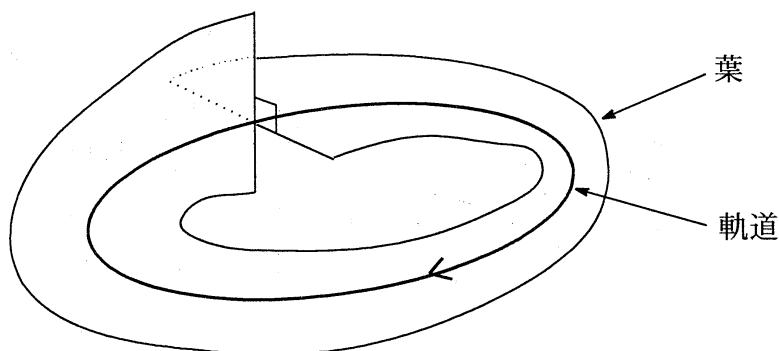


Figure 1: 葉が直交している図

きない。これが、いわゆる Gottschalk 予想である（「3次元球面は、すべての軌道が稠密となる流を持たない」）。

そこで、接葉層構造を持たないのはどのようなときかについて考えてみる。局所的には、流は積流のため、水平面を集めてくれば接葉層構造が構成できる。しかし、大域的に接葉層構造を持たないものが次のようにして容易に作れる。円板 D^2 上の微分同相写像 $f: D^2 \rightarrow D^2$ を

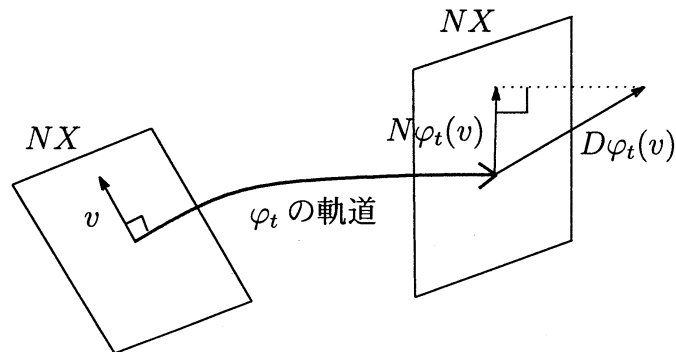
$$f(x, y) = (-y, x), \quad D^2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$$

により定義し（原点を中心とした $\frac{\pi}{2}$ 回転），これによる $D^2 \times S^1$ 上の懸垂流を考えることにする。いまこれに接する余次元1葉層構造があったとすると、中心にある閉軌道を1周する間に葉が角度 $\frac{\pi}{2}$ ひねられるため、葉が直交してしまう (Figure 1)。したがって、このように軌道に沿ってひねられている場合は、接葉層構造が存在しにくくなる。

そこで、最初の問題に戻るならば、「軌道に沿ってどのくらいひねられているかを知る手段を見つけること」，そして、「軌道がひねられていない場合，余次元1葉層構造に接するかを調べること」という2段階に問題を分けることができる。この講究録では、前者の問題についての1つの解法として、Ruelle 不変量を取り上げ、それに関するいくつかの結果を述べるとともに、後者の問題についてのアプローチについて述べることにする。

2 角度流

この節では、軌道に沿ったひねりを定義するための道具として、角度流について解説する。いま、 M を3次元多様体とし、 X を非特異 C^1 ベクトル場とする。そして、流 φ_t が X により生成されているものとする。 M の接バンドル TM について、これを X に接する1次元バンドルで割った商バンドルを NX と書くことにする。別の見方をすると、 NX は、 X についての直

Figure 2: $N\varphi_t$ の別の見方

交補バンドルとみなすことができる。いま、時間 t を止めて考えると、 φ_t は微分同相写像なので、微分 $D\varphi_t$ を取ることができる。このとき、 $D\varphi_t$ は自然に NX 上の流を誘導する。これを $N\varphi_t$ と書き、微分流という。別の見方でいえば、 $D\varphi_t(v)$ の NX への直交射影を $N\varphi_t(v)$ とすることで、 $N\varphi_t$ は定義される (Figure 2)。ここで、われわれは軌道に沿ってどのくらいひねられているかのみを見たいので、流に沿った拡大を無視するため、 NX の射影化バンドル $PX = \bigcup_{z \in M} ((NX)_z - 0)/v \sim kv$ ($k \in \mathbf{R} - 0, v \in (NX)_z - 0$) を取る。ここで、 $(NX)_z$ は、バンドル NX の $z \in M$ 上のファイバーをあらわすものとする。上で定義した $N\varphi_t$ は定数倍を保つので、この流は再び、 PX 上の流を誘導する。これを角度流といい、 $P\varphi_t$ であらわす。ここで、 PX が \mathbf{P}^1 バンドルになっていることに注意すると、 $P\varphi_t$ はファイバーをファイバーに写すバンドル写像になっている。

3 ヲディスタル流

この節では、接葉層構造をもつための必要条件について、角度流の立場から考えるとともに、1つの十分条件を与える。いま、固定点を持たない C^1 流 φ_t が余次元1 C^1 葉層構造 \mathfrak{F} に接しているとする。葉層構造に接する平面場 $T\mathfrak{F}$ は、当然 X を含むことになる。そこで、直交補バンドルとみなしたときの NX について、 NX と $T\mathfrak{F}$ との交わりを考えると、1次元バンドルが構成される。いいかえると、 $NX \cap T\mathfrak{F}$ は、 PX 上の (バンドルとしての) 切断を定める。この切断は $P\varphi_t$ により不変になるため、 $P\varphi_t$ が余次元1の不変集合を持つことがわかる。

一般に、固定点がない流が与えられても、 $P\varphi_t$ 不変な切断を持たない例がいくつも存在する。 PX が自明なバンドルであるとき ($PX = M \times \mathbf{P}^1$)、その無限巡回被覆 $M \times \mathbf{R}$ に、 $P\varphi_t$ から誘導される流を $\widetilde{P\varphi_t}$ とすると (詳しくは後述)、 $\widetilde{P\varphi_t}$ が稠密な軌道を持つ例さえ存在する ([6])。

しかし、 $N\varphi_t(v)$ がつぶれないという条件を課すと、以下に述べるように、 PX は $P\varphi_t$ 不変な切断を持ち、さらに接葉層構造が存在する： NX のどのようなベクトル v ($v \neq 0$) についても、 $\inf_{t \in \mathbf{R}} \|N\varphi_t(v)\| \neq 0$ となるとき、 φ_t は ν -ディスタル性を持つということにする。これは、流と横断的な方向について、微分流がつぶれないことを表しており、horocycle 流などはこの性質を満たしている。

定理 1 (S. Matsumoto, H. Nakayama [5]) φ_t が ν -ディスタル性を満たす極小流（すべての軌道が稠密）ならば、 φ_t に接する余次元 1 の C^0 葉層構造が（ただひとつ）存在する。

この定理の証明で難しいところは、切断が存在した後葉層構造を構成するところにある。切断自身は極小集合の存在を使って構成されるため、連続な切断である。もし、これが微分可能な切断であるとする、その積分曲線を使い、容易に接葉層構造が構成される。連続な切断からこの議論をたどろうとすると、積分曲線が分岐してしまい、構成される葉層構造が分岐を持ってしまう。この分岐をなくすところの証明が難しく、論文の大半がこれに費やされている。

第 1 節でも解説したとおり、 S^3 の余次元 1 C^0 葉層構造はいつもトーラス葉を持つため (Novikov の定理)、定理 1 により次の系を導くことができる。

系 1 S^3 は ν -ディスタル性を持つ極小流を持たない。

これは、Gottschalk 予想の部分的な解決になっている。

4 Ruelle 不変量

ここで、話を元に戻し、軌道に沿ってどのくらいをひねられているかを見る指標について考えることにする。これについては、Calabi 不変量、Arnold 不変量、Ruelle 不変量などいくつかの指標が知られている。そこで、この講究録では、Ruelle 不変量について考えることにする。これは、角度流の回転を直接計算するものであるため、接葉層構造の構成という話題に関して都合のいいものとなっている。

Ruelle 不変量は軌道に沿った回転を計算するものであるが、この際、座標自身が回転していても軌道に沿った回転が測れない。このため、以下の仮定を設けることにする。

仮定. PX はバンドルとして、自明なものとする。

PX は \mathbf{P}^1 バンドルであるから、1 次元コホモロジー群 $H^1(M)$ が消えていけば ($H^1(M) = 0$)、自明なバンドルになることを注意しておく。

そこで, PX の座標を $M \times \mathbf{P}^1$ と取ることにする. いま, \mathbf{P}^1 を円周 S^1 と同一視し, さらに, S^1 を \mathbf{R}/\mathbf{Z} と同一視すれば, \mathbf{R} から \mathbf{P}^1 への射影が定義できる. これを使うことにより, $M \times \mathbf{R}$ から PX への射影を定義することができる. この射影に関して, $P\varphi_t$ を $M \times \mathbf{R}$ にリフトしてできる流を $\widetilde{P\varphi_t}$ とする. $p_2: M \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ を第2射影とすると, 次の定理が成立する.

$$\begin{array}{ccccc}
 M \times \mathbf{R} & & \xrightarrow{\widetilde{P\varphi_t}} & & M \times \mathbf{R} \\
 \downarrow & & \circlearrowleft & & \downarrow \\
 PX = M \times \mathbf{P}^1 & & \xrightarrow{P\varphi_t} & & M \times \mathbf{P}^1 \\
 \downarrow & & \circlearrowleft & & \downarrow \\
 M & & \xrightarrow{\varphi_t} & & M
 \end{array}$$

定理 2 (Ruelle [7]) μ を, 流 φ_t を不変にする M 上の確率測度とする. このとき, $\rho(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{p_2 \widetilde{P\varphi_t}(z, 0)}{2t}$ は μ に関していたるところ収束し, 可積分になる.

そこで, $\int_M \rho(z) d\mu$ を, $R_\mu(\varphi_t)$ であらわし, Ruelle 不変量ということにする.

注意. この定義は, Gambaudo-Ghys [3] の定義を援用したものである. Ruelle 自身は $SL(2, \mathbf{R})$ の polar decomposition を利用して, Ruelle 不変量を定義している. Gambaudo-Ghys は, Ruelle 不変量が位相不変量になることや, 2次元コホモロジー群 $H^2(M)$ が消えているときに, Ruelle 不変量がバンドルの取り方にもよらないことなどをこの論文の中で証明している.

5 ファイバー不変測度

$p: PX \rightarrow M$ を \mathbf{P}^1 バンドルとみると,

$$\begin{array}{ccccc}
 PX & & \xrightarrow{P\varphi_t} & & PX \\
 p \downarrow & & \circlearrowleft & & \downarrow p \\
 M & & \xrightarrow{\varphi_t} & & M
 \end{array}$$

は, バンドル写像になっている. そこで, 各ファイバーに $P\varphi_t$ を制限してみると, これは \mathbf{P}^1 の微分同相写像になる. ここで, \mathbf{P}^1 が S^1 と微分同相であることに注意すれば, S^1 の微分同相写像と考えることができる. S^1 の微分同相写像については, これまで, さまざまな研究が行われ, 多くの道具が得られてきている. その中で最も重要とされるのが, 不変測度であろう. そこで, $P\varphi_t$ を S^1 の微分同相写像の束と考えることで, そこに, 不変測度を定義しようというのが, 本節の目標である.

定義. $\mathcal{M}(PX)$ を PX 上の確率測度全体とする. 写像 $\lambda: M \rightarrow \mathcal{M}(PX)$ がスカラー的に可測であるとは, どんな PX 上の連続関数 $h: PX \rightarrow \mathbf{R}$ を持ってきてても, $\int_{PX} h d\lambda(z)$ が可測になることとする.

いま, $P\varphi_t$ に不変な PX 上の確率測度を1つ取り, ν とする. $P\varphi_t$ は PX 上の流より, このような測度が必ず存在する. そこで, $p_*\nu$ を μ とすると, これは M 上の確率測度になっており, φ_t 不変である. この ν と μ について積分分解定理 ([1]) を使うと, スカラー的に可測な写像 $\lambda: M \rightarrow \mathcal{M}(PX)$ で次の性質を満たすものがただひとつ存在する (Zimmer 理論によっても構成される [8],[9],[10]).

- (1) M の任意の点 z について, $\text{supp } \lambda(z)$ は $p^{-1}(z)$ に含まれる.
- (2) M の可測集合 F について, $\nu(F) = \int_M d\mu \int_F d\lambda(z)$ が成立する.

ここで, このような写像がただひとつしか存在しないことから, λ が $P\varphi_t$ に関して不変になることが示される. すなわち, 任意の実数 t について, $(P\varphi_t)_*\lambda(z) = \lambda(\varphi_t(z))$ がいたるところ成立する. 一般には, 不変となる集合が時間 t により変化する可能性があるが, 平均を取ることににより, 次の命題が得られる.

命題 1 次を満たすスカラー的可測写像 $\lambda: M \rightarrow \mathcal{M}(PX)$ が存在する.

- (1) M の任意の点 z について, $\text{supp } \lambda(z)$ は $p^{-1}(z)$ に含まれる.
- (2) M の可測集合 F について, $\nu(F) = \int_M d\mu \int_F d\lambda(z)$ が成立する.
- (3) M の可測集合 E で, φ_t に関して不変, かつ, 測度が1になるものが存在し, E の任意の点 z と任意の実数 t について, $(P\varphi_t)_*\lambda(z) = \lambda(\varphi_t(z))$ が成立する.

この写像 $\lambda: M \rightarrow \mathcal{M}(PX)$ のことを, ファイバー不変測度という. これに関して, Birkhoff のエルゴード定理や Furstenberg の理論 [2] を用いることにより, 次のような性質を持つものに精密化することができる.

定理 3 (T. Inaba, H. Nakayama [4]) φ_t 不変でエルゴード的な M 上の確率測度 μ について, 次の性質をみたすファイバー不変測度 $\lambda: M \rightarrow \mathcal{M}(PX)$ と M 上の可測集合 E で測度が1のものが存在する.

- (1) E の任意の点 z と w について, 実数列 $\{t_n\}_{n=1,2,\dots}$ が存在し, 3つの条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{t_n}(z) = w$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\varphi_{t_n}(z)) = \lambda(w)$ が成立する.
- (2) $\text{supp } \lambda(z)$ は次の3つに分類される.
 - (a) $\text{supp } \lambda(z)$ は E 上ですべて1点になる.

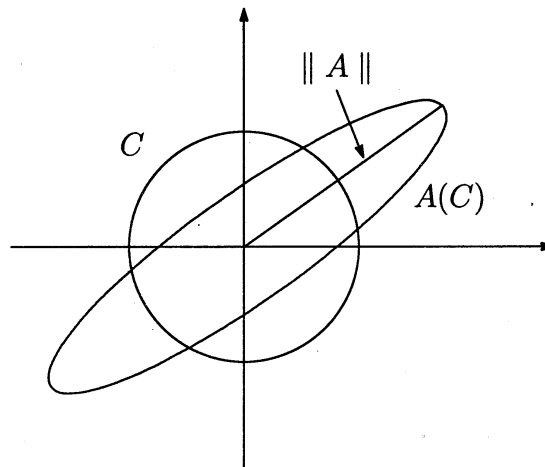


Figure 3: $\|A\| = \sup_{v \in \mathbf{R}^2, \|v\|=1} \|A(v)\|$

(b) $\text{supp } \lambda(z)$ は E 上ですべて 2 点になる.

(c) $\text{supp } \lambda(z)$ は E 上で $p^{-1}(z)$ 全体になる.

ここで, PX 上の不変測度 ν としては, $\int d\mu \int d\lambda(z)$ を考えることにする.

定理 3 の条件 (2) は次のようにして証明される.

いま, $PSL(2, \mathbf{R}) = SL(2, \mathbf{R})/\{E, -E\}$ の元 A について, その長さを

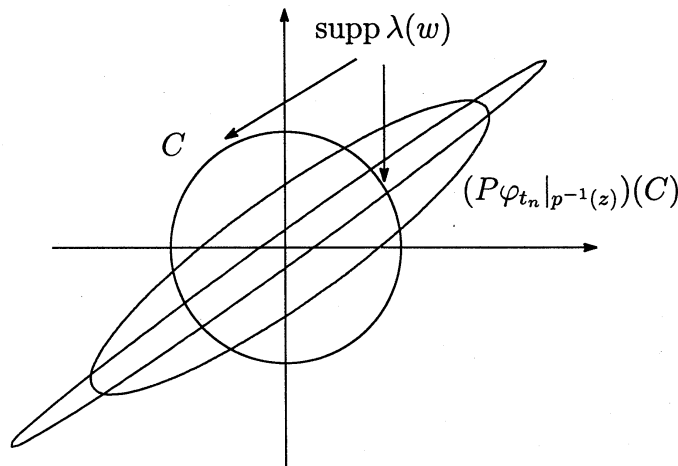
$$\|A\| = \sup_{v \in \mathbf{R}^2, \|v\|=1} \|A(v)\|$$

により与える. 一次変換 A により単位円 C は楕円に写る. このとき, $\|A\|$ はこの楕円の長径と一致している (Figure 3). いま, 1つのファイバー $p^{-1}(z)$ と実数 t をとり固定する. $N\varphi_t$ をこのファイバーに制限したもの $N\varphi_t|_{p^{-1}(z)}$ は, 微分から誘導されるので, 線形写像になり, $SL(2, \mathbf{R})$ の元と思える. 更に, $P\varphi_t|_{p^{-1}(z)}$ は $N\varphi_t|_{p^{-1}(z)}$ を射影化したものなので, $PSL(2, \mathbf{R})$ の元とみなせる. そこで, 上記の $\|*\|$ を取ってみる. 技術的には, PX が $PSO(2)$ バンドルであるから, $\|P\varphi_t|_{p^{-1}(z)}\|$ が, 座標の取り方によらずに自然に定義される.

定理 3 (1) より, E 上の任意の 2 点 z と w について, 実数列 $\{t_n\}_{n=1,2,\dots}$ が存在し, 3つの条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{t_n}(z) = w$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\varphi_{t_n}(z)) = \lambda(w)$ が成立する. そこで, 次の 2つに場合分けすることにする.

(1) $\|P\varphi_{t_n}|_{p^{-1}(z)}\|$ が n に関して有界な場合

(2) $\|P\varphi_{t_n}|_{p^{-1}(z)}\|$ が n に関して有界でない場合

Figure 4: $(P\varphi_{t_n}|_{p^{-1}(z)})(C)$

はじめに, (2) の場合を考える. 部分列をとることで, $\|P\varphi_{t_n}|_{p^{-1}(z)}\|$ が無限に大きくなるとして一般性を失わない. いま, $P\varphi_{t_n}|_{p^{-1}(z)}$ による単位円の像を考えると, これは面積は1のままで長径がだんだんと大きくなっていく楕円の列になる (Figure 4). λ の不変性からこの細くなった楕円の集積点のところに, supp が存在することになる. これが $\text{supp } \lambda(w)$ が1点または2点になる状況である (2点目は楕円が広がる方向に存在する).

一方, (1) の場合については, 部分列 $\{t_n\}$ を取ることで, $P\varphi_{t_n}|_{p^{-1}(z)}$ が収束していると思うことができる. これは, $\lambda(z)$ が $PSL(2, \mathbf{R})$ の元により, $\lambda(w)$ に写されることを表している. そこで, $\lambda(z)$ を $\lambda(w)$ に写す $PSL(2, \mathbf{R})$ の元全体を調べると, 回転を除いて1つしかないことがわかり, $\text{supp } \lambda(z)$ がファイバー全体になるようなファイバー不変測度を再構成できる.

6 Ruelle 不変量

この節では, ファイバー不変測度を使った Ruelle 不変量の計算について考える. 再び, $p: PX \rightarrow M$ は自明なバンドルとする ($PX = M \times \mathbf{R}$).

いま, ν を, PX 上の $P\varphi_t$ 不変な確率測度とし, $\lambda: M \rightarrow \mathcal{M}(PX)$ をファイバー不変測度とする. また, $M \times \mathbf{R}$ の測度全体のなす空間を $\mathcal{M}(M \times \mathbf{R})$ であらわすことにする. ここで, $\mathcal{M}(M \times \mathbf{R})$ の元は必ずしも確率測度ではないことに注意する (全体の測度が1とは限らない). このとき, $M \times \mathbf{R}$ 上の確率測度 $\tilde{\nu}$ で ν のリフトになっているものが存在する. また同様に, $\lambda: M \rightarrow \mathcal{M}(PX)$ を $\tilde{\lambda}: M \rightarrow \mathcal{M}(M \times \mathbf{R})$ にリフトすることができる. いま, $\tau_{(z,t)}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ($z \in M, t \in \mathbf{R}$) を, $\tau_{(z,t)}(x) = p_2 \widetilde{P\varphi_t}(z, x)$ により定義する. このとき, λ の

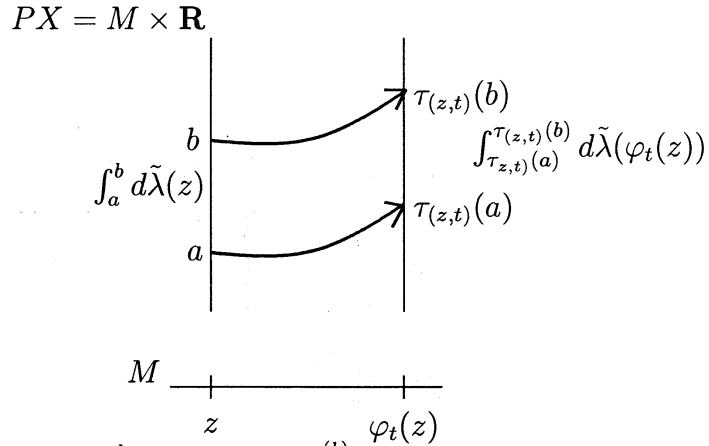


Figure 5: $\int_a^b d\tilde{\lambda}(z) = \int_{\tau_{(z,t)}(a)}^{\tau_{(z,t)}(b)} d\tilde{\lambda}(\varphi_t(z))$

不変性から,

$$\int_a^b d\tilde{\lambda}(z) = \int_{\tau_{(z,t)}(a)}^{\tau_{(z,t)}(b)} d\tilde{\lambda}(\varphi_t(z))$$

が成立する (Figure 5). ここで,

$$\int_a^b d\tilde{\lambda}(z) = \begin{cases} \tilde{\lambda}(z)(\{(z, x) \in M \times \mathbf{R}; a \leq x < b\}) & (\text{if } a < b) \\ -\tilde{\lambda}(z)(\{(z, x) \in M \times \mathbf{R}; b \leq x < a\}) & (\text{if } a > b) \end{cases}$$

とする. そこで, $\Delta : M \rightarrow \mathbf{R}$ を

$$\Delta(z) = \int_0^{\tau_{(\varphi_{-1}(z), 1)}(0)} d\tilde{\lambda}(z)$$

により定義すると, 次の補題が証明できる.

補題 1 任意の自然数 n について,

$$|\tau_{(z,n)}(0) - \sum_{i=1}^n \Delta(\varphi_i(z))| \leq 1$$

が成立する.

この補題は, どのような実数 y についても $\tilde{\lambda}(z)(\{(z, x) \in M \times \mathbf{R}; y \leq x < y+1\})$ が 1 になることを用い, $|\tau_{(z,n)}(0) - \int_0^{\tau_{(z,n)}(0)} d\tilde{\lambda}(\varphi_n(z))| \leq 1$ を示し, Figure 5 の公式を使い, $\int_0^{\tau_{(z,n)}(0)} d\tilde{\lambda}(\varphi_n(z)) = \sum_{i=1}^n \Delta(\varphi_i(z))$ を示すことで証明される.

次に, $\rho(z)$ が $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \tau_{(z,n)}(0)$ と一致することに注目すると,

$$R_\mu(\varphi_t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \Delta(\varphi_i(z)) d\mu = \frac{1}{2} \int_M \Delta(z) d\mu$$

となり, これを使うことで, 次の定理が導かれる.

定理 4 (T. Inaba, N. Nakayama [4])

$\Omega_+ = \{(z, x) \in M \times \mathbf{R}; 0 \leq x < \tau_{(\varphi_{-1}(z), 1)}(0), \tau_{(\varphi_{-1}(z), 1)}(0) > 0\}$,
 $\Omega_- = \{(z, x) \in M \times \mathbf{R}; 0 > x \geq \tau_{(\varphi_{-1}(z), 1)}(0), \tau_{(\varphi_{-1}(z), 1)}(0) < 0\}$ とするとき,
 Ruelle 不変量は

$$R_\mu(\varphi_t) = \frac{1}{2} \tilde{\nu}(\Omega_+) - \frac{1}{2} \tilde{\nu}(\Omega_-)$$

であらわすことができる.

この定理を用いると, $R_\mu(\varphi_t)$ が φ_t に関して連続変化すること (C^1 位相について) が簡単に証明できる. これは, Ruelle のもともとの証明より見やすいものとなっている.

7 ファイバー不変測度の応用

この節では, T^2 の微分同相写像についての, 定理 4 の応用を考える. いま, $f: T^2 \rightarrow T^2$ を, 恒等写像と isotope な微分同相写像とする. f 不変な確率測度 μ について, Ruelle 不変量 $R_\mu(f)$ が流の場合と同様に定義できる. このとき, 次の定理が成り立つ.

定理 5 (S. Matsumoto, H. Nakayama) 恒等写像と isotope な T^2 の微分同相写像で, どんな確率不変測度 μ についても, その Ruelle 不変量が正になるものは存在しない.

系 1 恒等写像と isotope な T^2 の微分同相写像が *uniquely ergodic* ならば, その Ruelle 不変量はいつも 0 になる.

これらの定理の証明では, T^2 の微分同相写像で恒等写像と isotope なものは, 軌道に沿って常に同方向にひねられることはないということを, はじめに証明し, これに定理 4 の微分同相写像版を用いている.

References

- [1] N. Bourbaki, *Intégration*, Hermann, Paris, 1959.
- [2] H. Furstenberg, A Poisson formula for semisimple Lie groups, *Annals of Math.* **77** (1963), 335–383.
- [3] J. Gambaudo and É. Ghys, Enlacements Asymptotiques, *Topology*, **36** (1997), 1355–1379.
- [4] T. Inaba and H. Nakayama, Invariant fiber measures of angular flows and the Ruelle invariant, preprint.
- [5] S. Matsumoto and H. Nakayama, On ν -distal flows on 3-manifolds, *Bull. London Math. Soc.* **29** (1997), 609–616.
- [6] H. Nakayama, Transitively twisted flows of 3-manifolds, preprint.
- [7] D. Ruelle, Rotation numbers for diffeomorphisms and flows, *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.* **42** (1985), 109–115.
- [8] R. J. Zimmer, Amenable ergodic group actions and an application to Poisson boundaries of random walks, *J. Func. Anal.* **27** (1978), 350–372.
- [9] R. J. Zimmer, Induced and amenable ergodic actions of Lie groups, *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.* **11** (1978), 407–428.
- [10] R. J. Zimmer, *Ergodic Theory and Semisimple Groups*, Birkhäuser, 1984.